К ТЕОРИИ УСТОЙЧИВОСТИ СТАЦИОНАРНЫХ ЛИНЕЙНЫХ КРУПНОМАСШТАБНЫХ СИСТЕМ

А.А.Мартынюк*, В.Г.Миладжонов, Р.В.Муллажонов

In the paper we study autonomous linear large scale systems in context with generalized transpositions of matrix and its structure. We establish a new conditions of stability via matrix–valued Lyapunov functions.

Ушбу мақолада биз чизиқли йирик масштабли автоном системаларни хоссаларини матрицаларни умумлашган транспонирлаш хоссаларидан фойдаланиб ўрганамиз. Ляпунов матрица–функция усули ёрдамида янги турғунлик шартларини хосил қилдик.

Введение. Проблема устойчивости линейных крупномасштабных систем в контекст со структурой системы исследовалось в монографии [6], где имеется обширная библиография. В работе [5] предложена операция обобщенного транспонирования матрицы (cf. [1,2,7]), которая позволяет установить некоторую классификацию структур линейной крупномасштабных систем.

Целью этой статьи является анализ устойчивости крупномасштабной линейной системы на основе двух возможных форм декомпозиции относительно вертикальной и горизонтальной осей симметрии и относительно уравновешивающихся подсистем.

1. Предварительные результаты. Пусть A квадратная матрица n–го порядка, A^T, $A^\perp, A^0$ – транспонированные матрицы относительно главной, неглавной диагонали и центра матрицы, соответственно. (см. [5] и библиографию там). Рассмотрим следующие системы

$$\dot{x} = Ax, \qquad (1)$$

$$\dot{x} = A^T x, \qquad (2)$$

$$\dot{x} = A^\perp x, \qquad (3)$$

$$\dot{x} = A^0 x, \qquad (4)$$

где $x = (x_1, x_2, ..., x_n)^T \in R^n$.

Теорема 1. Если состояние равновесия системы (1) устойчиво (асимптотически устойчиво) или неустойчиво, то состояния равновесия систем (2), (3), (4) также устойчиво (асимптотически устойчиво) или неустойчиво, соответственно.

Доказательство. Из свойств транспонированных матриц (см, [5]) имеем

$$\left|A - \lambda E\right| = \left|A^T - \lambda E\right| = \left|A^\perp - \lambda E\right| = \left|A^0 - \lambda E\right|,$$

т.е. характеристические корни матриц A, A^T, $A^\perp, A^0$ одинаковы. Откуда следует справедливость утверждений теоремы 1.

Пример. Пусть

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 3 \\ -2 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

тогда

$$A^T = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 1 & -3 & 0 \\ 0 & 3 & -4 \end{pmatrix}, \quad A^\perp = \begin{pmatrix} -4 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ -2 & 2 & -4 \end{pmatrix}, \quad A^0 = \begin{pmatrix} -4 & 0 & -2 \\ 3 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

и во всех случаях характеристическое уравнение имеет вид

* А.А.Мартынюк — академик АН Украины

$$\lambda^3 + 8\lambda^2 + 17\lambda + 10 = 0.$$

Его корнями являются $\lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = -2,\ \lambda_3 = -5$, т.е. состояние равновесия асимптотически устойчиво.

Следствие 1. Если в теореме 1 матрица А ортогональна относительно главной (неглавной) диагонали, центра матрицы, то состояние равновесия системы

$$\dot{x} = A^{-1}x \qquad (5)$$

также устойчиво (асимптотически устойчив) или неустойчиво соответственно.

Действительно, если матрица А ортогонально относительно главной (неглавной) диагонали, центра матрицы то по определение 7 $A^T = A^{-1},\ A^{\perp} = A^{-1},\ A^0 = A^{-1}$ соответственно и справедливость следствие 1 следует из теорема 1.

Теорема 2. Пусть для системы (1) существует функция Ляпунова

$$v(x) = x^T Px, \qquad (6)$$

и матрица Р положительно определённая, симметрическая относительно главной диагонали или центра матрицы. Если матрица

$$P_1 = H^{-1}P = PH^{-1} \qquad (7)$$

положительно определенная, то из устойчивости (асимптотической устойчивости) или неустойчивости состояния равновесия системы (1) следует устойчивость (асимптотическая устойчивость) или неустойчивость состояния равновесия системы

$$\dot{x} = HAx \qquad (8)$$

соответственно, где матрица Н–неособенная, положительно определенная, симметрическая относительно главной диагонали или центра матрицы.

Доказательство. Для системы (8) построим функцию Ляпунова в виде

$$v_1(x) = x^T P_1 x \qquad (9)$$

Так как по условию теоремы 2 матрица P_1 положительно определенная, поэтому функция (9) положительно определенная. Полная производная функции (9) в силу системы (8) имеет вид

$$v_1(x) = \dot{x}^T P_1 x + x^T P_1 \dot{x} = x^T \left[(HA)^T P_1 + P_1 HA\right]x = x^T (A^T H^T H^{-1} P + PH^{-1} HA)x =$$
$$= x^T (A^T P + PA)x = \dot{v}(x)$$

Отсюда следует, что знакоопределенность функции $(\dot{v}_1(x))_8$ и $(\dot{v}(x))_1$ одинакова. Откуда следует справедливость теоремы 2.

Пример. Пусть в системы (1) матрица А имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$$

В этом случае для системы (1) функцией Ляпунова можно выбрать функцию

$$v(x) = x^T Ex$$

т.е. $P = E$ –единичная матрица. Рассмотрим неособенную положительно определенную матрицу, симметрическую относительно главной диагонали

$$H = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{12} & h_{22} \end{pmatrix}, \qquad H^{-1} = \frac{1}{|H|}\begin{pmatrix} h_{22} & -h_{12} \\ -h_{12} & h_{11} \end{pmatrix}$$

и систему

$$\dot{x} = HAx,\ \ m.e.\ \ \dot{x} = \begin{pmatrix} -h_{11} + 2h_{12} & h_{11} - 3h_{12} \\ -h_{12} + 2h_{22} & h_{12} - 3h_{22} \end{pmatrix}x \qquad (10)$$

где $x = (x_1, x_2)^T \in R^2$. На основе теоремы 2 для системы (10) построим функции Ляпунова в виде

$$v_1(x) = x^T H^{-1} x = x^T \frac{1}{|H|}\begin{pmatrix} h_{22} & -h_{12} \\ -h_{12} & h_{11} \end{pmatrix} x \quad (11)$$

полная производная, которой в силу системы (10) имеет вид.

$$\dot{v}_1(x) = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}.$$

Итак, для асимптотической устойчивости состояния равновесия системы (10) достаточно выполнения условий

$$h_{ii} > 0,\ i = 1,2;\ \ h_{11}h_{22} - h_{12}^2 > 0.$$

Теорема 2/. Пусть для системы (1) построена функция Ляпунова (6) и существует положительно определенная матрица

$$P_1 = HP = PH, \qquad (7')$$

где матрица Н–неособенная, положительно определенная и симметрическая относительно главной диагонали или центра матрицы. Тогда, то из устойчивости (асимптотической устойчивости) или неустойчивости состояния равновесия системы (1) следует устойчивость (асимптотическая устойчивость) или неустойчивость состояния равновесия системы

$$\dot{x} = H^{-1} A x \qquad (8')$$

соответственно.

Доказательство теоремы 2/ аналогично доказательству теоремы 2.

Замечание. Если в теореме 2 (теореме 2/) $P = E$, то теорема 2 (теорема 2/) остаётся в силе при $P_1 = H^{-1}$ $(P_1 = H)$.

Теорема 3. Пусть функция $v(x) = x^T Ex$ является функцией Ляпунова для системы

$$\dot{x} = A_0 x, \qquad (12)$$

где $x \in R^n$, $A_0 \in R^{n\times n}$, E – единичная матрица n–го порядка и матрицы $H_1, H_2, ..., H_m - n -$ мерные неособенные положительно определенные симметрические относительно главной диагонали или центра матрицы.

Тогда из устойчивости (асимптотической устойчивости) или неустойчивости состояния равновесия системы (12) следует устойчивость (асимптотическая устойчивость) или неустойчивость состояния равновесия системы

$$\dot{x} = Ax, \qquad (13)$$

где $A = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i A_i$ или $A = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i A_i^*$, $A_i = H_i A_0$, $A_i^* = H_i^{-1} A_0$, $\alpha_i \geq 0$, $i = 1,2,...,m.$, $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i^2 \neq 0$

Доказательство теоремы 3 следует из теоремы 2 и теоремы 2/ .

Если в теореме 3 $A_k < A_j$, $k, j = 1,2,...,n$, $k \neq j$ и $\alpha_k + \alpha_j = 1$, а все остальные $\alpha_i = 0$, $i \neq k$, $i \neq j$, то матрица А удовлетворяет условию

$$A_k \leq A \leq A_j \qquad (14)$$

Теперь исследуем устойчивость состояния равновесия системы (1) при некоторых ограничениях. Пусть в системе (1) матрица А симметрическая относительно центра матрицы. В этом случае можно осуществить декомпозицию системы (1) по вертикальной и горизонтальной оси симметрии или по уравновешивающимся подсистемам.

2.Декомпозиция относительно вертикальной и горизонтальной осей симметрии.

При такой декомпозиции система (1) имеет вид

$$\dot{y} = A_1 y + B_1 z,$$
$$\dot{z} = B_1^0 y + A_1^0 z, \qquad (15)$$

если $n = 2k$ и свободные подсистемы будут

$$\dot{y} = A_1 y, \qquad (16)$$
$$\dot{z} = A_1^0 z, \qquad (17)$$

если $n = 2k+1$

$$\dot{y} = A_1 y + a_2 x_{k+1} + B_1 z,$$
$$\dot{x}_{k+1} = a_1^T y + a_{k+1,k+1} x_{k+1} + (a_1^T)^0 z \qquad (18)$$
$$\dot{z} = B_1^0 y + a_2^0 x_{k+1} + A_1^0 z,$$

то свободные подсистемы будут вида (16), (17) и

$$\dot{x}_{k+1} = a_{k+1,k+1} x_{k+1} \qquad (19)$$

Здесь A_1, B_1 – квадратные матрицы к–го порядка, A_1^0, B_1^0 –их транспонирование относительно центра матрицы соответственно, векторы

$$a_1 = (a_{k+1,1}, a_{k+1,2}, ..., a_{k+1,k})^T,\ a_2 = (a_{k+1,k+2}, a_{k+1,k+3}, ..., a_{k+1,n})^T,$$
$$y = (x_1, x_2, ..., x_k)^T,\ z = (x_{k+2}, x_{k+3}, ..., x_n)^T,\ x = (y^T, x_{k+1}, z^T)^T.$$

Для системы (15) и подсистем (16), (17) построим матрицу–функцию

$$U_1(y,z) = \begin{pmatrix} v_{11}(y) & v_{12}(y,z) \\ v_{21}(y,z) & v_{22}(z) \end{pmatrix}, \quad v_{12} = v_{21} \qquad (20)$$

с элементами

$$v_{11}(y) = y^T P_1 y,\ v_{22}(z) = z^T P_1^0 z,\ v_{12}(y,z) = v_{21}(y,z) = y^T P_2 z, \qquad (21)$$

которые удовлетворяют следующим оценкам (см. [4] и библиографию там)

$$a)\ \lambda_m(P_1)\|y\|^2 \le v_{11}(y) \le \lambda_M(P_1)\|y\|^2, \quad \forall y \in N_y \subseteq R^k,$$
$$b)\ \lambda_m(P_1^0)\|z\|^2 \le v_{22}(z) \le \lambda_M(P_1^0)\|z\|^2, \quad \forall z \in N_z \subseteq R^k, \qquad (22)$$
$$c)\ -\lambda_M^{1/2}(P_2 P_2^T)\|y\|\|z\| \le v_{12}(y,z) \le \lambda_M^{1/2}(P_2 P_2^T)\|y\|\|z\|, \quad \forall (y,z) \in N_y \times N_z \subseteq R^{k\times k},$$

при всех $(y,z) \in N_y \times N_z \subseteq R^{k\times k}$ где матрицы P_1, P_1^0 –положительно–определенные, симметрические относительно главной диагонали или центра матрицы, P_2 –постоянная матрица, все матрицы к–го порядка, $\lambda_m(\cdot), \lambda_M(\cdot)$ –минимальные и максимальные собственные числа матрицы соответственно, $\lambda_M^{1/2}(P_2 P_2^T)$ норма матрицы P_2. Отметим, что $\lambda_m(P_1) = \lambda_m(P_1^0), \quad \lambda_M(P_1) = \lambda_M(P_1^0)$

Для скалярной функции

$$v_1(y,z) = \eta^T U_1(y,z)\eta \qquad (23)$$

где $\eta^T = (1,1)$, имеет место двусторонняя оценка

$$u_1^T \underline{A}_1 u_1 \le v_1(y,z) \le u_1^T \overline{A}_1 u_1, \forall (y,z) \in N_y \times N_z \subseteq R^{k\times k} \qquad (24)$$

где $u^T(\|y\|, \|z\|)$,

$$\underline{A}_1 = \begin{pmatrix} \lambda_m(P_1) & -\lambda_M^{1/2}(P_2P_2^T) \\ -\lambda_M^{1/2}(P_2P_2^T) & \lambda_m(P_1) \end{pmatrix}, \quad \overline{A}_1 = \begin{pmatrix} \lambda_M(P_1) & -\lambda_M^{1/2}(P_2P_2^T) \\ -\lambda_M^{1/2}(P_2P_2^T) & \lambda_M(P_1) \end{pmatrix},$$

Для полных производных функций (21) в силу подсистем (16),(17) и системы (15) имеют место следующие неравенства:

$$\begin{aligned}
&а)\ \left(D_y^+ v_{11}(y)\right)^T A_1 y \le \rho_{11}\|y\|^2,\ \forall y \in N_{y0} \\
&б)\ \left(D_y^+ v_{11}(y)\right)^T B_1 z \le 2\rho_{12}\|y\|\|z\|,\ \forall (y,z) \in N_{y0} \times N_{z0}, \\
&в)\ \left(D_z^+ v_{22}(z)\right)^T A_1^0 z \le \rho_{22}\|z\|^2,\ \forall z \in N_{z0}, \\
&г)\ \left(D_я^+ v_{22}(z)\right)^T B_1^0 y \le 2\rho_{21}\|y\|\|z\|,\ \forall (y,z) \in N_{y0} \times N_{z0} \\
&д)\ \left(D_y^+ v_{12}(y,z)\right)^T A_1 y \le \rho_{13}\|y\|\|z\|,\ \forall (y,z) \in N_{y0} \times N_{z0} \qquad (22') \\
&е)\ \left(D_y^+ v_{12}(y,z)\right)^T B_1 z \le \frac{1}{2}\rho_{14}\|z\|^2,\ \forall z \in N_{z0}, \\
&ж)\ \left(D_z^+ v_{12}(y,z)\right)^T A_1^0 z \le \rho_{23}\|y\|\|z\|,\ \forall (y,z) \in N_{y0} \times N_{z0}, \\
&з)\ \left(D_z^+ v_{12}(y,z)\right)^T B_1^0 y \le \frac{1}{2}\rho_{24}\|y\|^2,\ \forall y \in N_{y0},
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
&\rho_{11} = \lambda_M(A_1^T P + P_1 A) = \rho_{22} = \lambda_M((A_1^T P_1 + P_1 A)^0), \\
&\rho_{12} = \rho_{21} = \lambda_M^{1/2}((P_1B_1)(P_1B_1)^T) = \lambda_M^{1/2}((P_1B_1)^0(P_1B_1)^{T^0}), \\
&\rho_{13} = \lambda_M^{1/2}((A_1^T P_2)(A_1^T P_2)^T), \quad \rho_{23} = \lambda_M^{1/2}((P_2A_1^0)(P_2A_1^0)^T), \\
&\rho_{14} = \lambda_M(P_2^T B_1 + B_1^T P_2), \qquad \rho_{24} = \lambda_M(P_2B_1^0 + B_1^\perp P_2^T), \\
&N_{y0} = \{y : y \in N_y, y \ne 0\}, \quad N_{z0} = \{z : z \in N_z, z \ne 0\}.
\end{aligned}$$

При этом, для полной производной функции (23) имеет место оценка

$$\dot{v}_1(y,z) \le u^T C_1 u, \quad \forall (y,z) \in N_{y0} \times N_{z0} \qquad (25)$$

где $u^T = (\|y\|, \|z\|)$,

$$C_1 = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$$

$$c_{11} = \rho_{11} + \frac{1}{2}\rho_{24},\ c_{22} = \rho_{22} + \frac{1}{2}\rho_{14},\ c_{12} = \rho_{12} + \rho_{21} + \frac{1}{2}(\rho_{13} + \rho_{23}),$$

Заметим, что матрица $\underline{A}_1$ симметрическая относительно центра матрицы, а матрица C_1 будет симметрической относительно центра матрицы, если

$$P_2B_1 + (P_2B_1)^T = P_2B_1^0 + (P_2B_1^0)^T \qquad (26)$$

Но для выполнения равенств (26) достаточно выполнение условия $P_2 = P_2^0$ или $B_1 = B_1^0$.

Итак, на основе теоремы Ляпунова об асимптотической устойчивости, положительная определенность матрицы $\underline{A}_1$ и отрицательная определенность матрицы C_1 являются достаточными для асимптотической устойчивости состояния равновесия системы (15).

Далее для системы (18) и подсистем (16), (17), (19) построим матрицу–функцию

$$U_2(y, x_{k+1}, z) = (v_{ij}), \quad i, j = 1,2,3, \quad v'_{ij} = v'_{ji} \qquad (27)$$

с элементами

$$v'_{11} = v_{11}(y),\ v'_{12} = \alpha_{12} x_{k+1} y,\ v'_{13} = v_{12}(y,z),\ v'_{21} = v'_{12},\ v'_{22} = \alpha_{22} x_{k+1}^2,$$
$$v'_{23} = \alpha_{23} x_{k+1} z,\ v'_{33} = v_{22}(z),\ v'_{31} = v'_{13}, v'_{32} = v'_{23} \qquad (28)$$

которые удовлетворяют оценкам

$$а) \quad \lambda_m(P_1)\|y\|^2 \le v'_{11}(y) \le \lambda_M(P_1)\|y\|^2,\ \forall y \in N_y \subseteq R^k,$$
$$б) \quad v'_{22}(x_{k+1}) = \alpha_{22}|x_{k+1}|^2,\ \forall x \in N_{x_{k+1}} \subseteq R,$$
$$в) \quad \lambda_m(P_1^0)\|z\|^2 \le v'_{33}(z) \le \lambda_M(P_1^0)\|z\|^2,\ \forall z \in N_z \subseteq R^k,$$
$$г) \quad -|\alpha_{12}\|x_{k+1}\|\|y\|^2 \le v'_{12}(x_{k+1}, y) \le |\alpha\|x_{k+1}\|\|y\|,\ \forall (x_{k+1}, y) \in N_{x_{k+1}} \times N_y \subseteq R^{1+k}, \qquad (29)$$
$$д) \quad -\lambda_M^{1/2}(P_2 P_2^T)\|y\|\|z\| \le v'_{13}(y,z) \le \lambda_M^{1/2}(P_2 P_2^T)\|y\|\|z\|,\ \forall (y,z) \in N_y \times N_z \subseteq R^{k\times k},$$
$$е) \quad -|\alpha_{23}\|x_{k+1}\|\|z\| \le v'_{23}(x_{k+1}, z) \le |\alpha_{23}\|x_{k+1}\|\|z\|,\ \forall (x_{k+1}, z) \in N_{x_{k+1}} \times N_z \subseteq R^{1+k},$$

где матрицы P_1, P_1^0, P_2 определяются так, как в (22), $\alpha_{22} > 0, \alpha_{12}, \alpha_{23}$ – действительные числа. Для скалярной функции

$$v_2(y, x_{k+1}, z) = \eta^T U_2(y, x_{k+1}, z)\eta, \qquad (30)$$

где $\eta = (1,1,1)$, верны оценки

$$u_2^T \underline{A}_2 u_2 \le v_2(y, x_{k+1}, z) \le u_2^T \overline{A}_2 u_2 \qquad (31)$$
$$\forall (y, x_{k+1}, z) \in N_y \times N_{x_{k+1}} \times N_z \subseteq R^{(k+1)\times k}$$

где $u_2^T = (\|y\|, \|x_{k+1}\|, \|y\|),\ \underline{A}_2 = (\underline{a}_{ij}),\ i, j = 1,2,3, \underline{a}_{ij} = \underline{a}_{ji},\ \overline{A}_2 = (\overline{a}_{ij}),\ i, j = 1,2,3, \overline{a}_{ij} = \overline{a}_{ji}$

$$\underline{a}_{11} = \lambda_m(P_1), \underline{a}_{12} = -|\alpha_{12}|,\ \underline{a}_{13} = \lambda_M^{1/2}(P_2 P_2^T), \underline{a}_{21} = \underline{a}_{12}$$
$$\underline{a}_{22} = \alpha_{22},\ \underline{a}_{13} = -|\alpha_{23}|,\ \underline{a}_{31} = \underline{a}_{13},\ \underline{a}_{32} = \underline{a}_{23}, \underline{a}_{33} = \lambda_m(P_1^0)$$
$$\overline{a}_{11} = \lambda_M(P_1), \overline{a}_{12} = |\alpha_{12}|, \overline{a}_{13} = \lambda_M^{1/2}(P_2 P_2^T), \overline{a}_{21} = \overline{a}_{12},\ \overline{a}_{22} = \alpha_{22},$$
$$\overline{a}_{23} = |\alpha_{23}|, \overline{a}_{31} = \overline{a}_{13}, \overline{a}_{32} = \overline{a}_{23}, \overline{a}_{33} = \lambda_M(P_1^0).$$

Для производных функции (29) в силу подсистем (16), (17), (19) и системы (18) имеют место следующие неравенства:

$$а) \ (D_y^+ v'_{11})^T A_1 y \le \rho'_{11}\|y\|^2,\ \ \forall y \in N_{y0}$$
$$б) \ (D_y^+ v'_{11})^T a_2 x_{k+1} \le 2\rho'_{12}|x_{k+1}\|\|y\|,\ \ \forall (x_{k+1}, y) \in N_{x_{k+1}0} \times N_{y0},$$
$$в) \ (D_y^+ v'_{11})^T B_1 z \le 2\rho'_{13}\|y\|\|z\|,\ \ \forall (y,z) \in N_{y0} \times N_{z0},$$
$$г) \ (D_{x_{k+1}}^+ v'_{22})^T a_1^T y \le 2\rho'_{21}|x_{k+1}\|\|y\|,\ \ \forall (x_{k+1}, y) \in N_{x_{k+1}0} \times N_{y0},$$
$$д) \ (D_{x_{k+1}}^+ v'_{22})^T a_{k+1,k+1} x_{k+1} \le \rho'_{22}|x_{k+1}|^2,\ \ \forall x_{k+1} \in N_{x_{k+1}0},$$

е) $(D^{+}_{x_{k+1}} v'_{22})^T (a_1^T)^0 z \le 2\rho'_{23} |x_{k+1}| \|z\|, \quad \forall (x_{k+1}, z) \in N_{x_{k+1}0} \times N_{z0},$

ж) $(D^{+}_{z} v'_{33})^T B_1^0 y \le 2\rho'_{31} \|y\| \|z\|, \quad \forall (y, z) \in N_{y0} \times N_{z0},$

з) $(D^{+}_{z} v'_{33})^T a_2^0 x_{k+1} \le 2\rho'_{23} |x_{k+1}| \|z\|, \quad \forall (x_{k+1}, z) \in N_{x_{k+1}0} \times N_{z0},$

к) $(D^{+}_{z} v'_{33})^T A_1^0 z \le \rho'_{33} \|z\|^2, \quad \forall z \in N_{z0},$

л) $(D^{+}_{x_{k+1}} v'_{12})^T a_1^T y \le \rho'_{14} \|y\|^2, \quad \forall y \in N_{y0},$

м) $(D^{+}_{x_{k+1}} v'_{12})^T a_{k+1,k+1} x_{k+1} \le \rho'_{15} |x_{k+1}| \|y\|, \quad \forall (x_{k+1}, y) \in N_{x_{k+1}0} \times N_{y0},$

н) $(D^{+}_{x_{k+1}} v'_{12})^T (a_1^T)^0 z \le \rho'_{16} \|y\| \|z\|, \quad \forall (y, z) \in N_{y0} \times N_{z0},$

о) $(D^{+}_{y} v'_{12})^T A_1 y \le \rho'_{17} |x_{k+1}| \|y\|, \quad \forall (x_{k+1}, y) \in N_{x_{k+1}0} \times N_{y0},$

п) $(D^{+}_{y} v'_{12})^T a_2 x_{k+1} \le \rho'_{18} \|x_{k+1}\|^2, \quad \forall x_{k+1} \in N_{x_{k+1}0},$

р) $(D^{+}_{y} v'_{12})^T B_1 z \le \rho'_{19} |x_{k+1}| \|z\|, \quad \forall (x_{k+1}, z) \in N_{x_{k+1}0} \times N_{z0},$

с) $(D^{+}_{y} v'_{13})^T A_1 y \le \rho'_{24} \|y\| \|z\|, \quad \forall (y, z) \in N_{y0} \times N_{z0},$

т) $(D^{+}_{y} v'_{13})^T a_2 x_{k+1} \le \rho'_{25} |x_{k+1}| \|z\|, \quad \forall (x_{k+1}, z) \in N_{x_{k+1}0} \times N_{z0},$

у) $(D^{+}_{y} v'_{13})^T B_1 z \le \rho'_{26} \|z\|^2, \quad \forall z \in N_{z0}$

ф) $(D^{+}_{z} v'_{13})^T B_1^0 y \le \rho'_{27} \|y\|^2, \quad \forall y \in N_{y0}$

х) $(D^{+}_{z} v'_{13})^T a_2^0 x_{k+1} \le \rho'_{28} |x_{k+1}| \|z\|, \quad \forall (x_{k+1}, z) \in N_{x_{k+1}0} \times N_{z0},$

ц) $(D^{+}_{я} v'_{13})^T A_1^0 z \le \rho'_{29} \|y\| \|z\|, \quad \forall (y, z) \in N_{y0} \times N_{z0},$

э) $(D^{+}_{x_{k+1}} v'_{23})^T a_1^T y \le \rho'_{34} \|y\| \|z\|, \quad \forall (y, z) \in N_{y0} \times N_{z0},$

ю) $(D^{+}_{x_{k+1}} v'_{23})^T a_{k+1,k+1} x_{k+1} \le \rho'_{35} |x_{k+1}| \|z\|, \quad \forall (x_{k+1}, z) \in N_{x_{k+1}0} \times N_{z0}$

я) $(D^{+}_{x_{k+1}} v'_{23})^T (a_1^T)^0 z \le \rho'_{36} \|z\|^2, \quad \forall z \in N_{z0},$

ъ) $(D^{+}_{z} v'_{23})^T B_1^0 y \le \rho'_{37} |x_{k+1}| \|y\|, \quad \forall (x_{k+1}, y) \in N_{x_{k+1}0} \times N_{y0},$

ь) $(D^{+}_{z} v'_{23})^T a_2^0 x_{k+1} \le \rho'_{38} |x_{k+1}|^2, \quad \forall x_{k+1} \in N_{x_{k+1}0},$

ы) $(D^{+}_{z} v'_{23})^T A_1^0 z \le \rho'_{36} |x_{k+1}| \|z\|, \quad \forall (x_{k+1}, z) \in N_{x_{k+1}0} \times N_{z0},$

где $\rho'_{11} = \rho_{11}, \quad \rho'_{12} = \lambda_M^{1/2}\left((P_1 a_2)(P_1 a_2)^T\right), \quad \rho'_{13} = \lambda_M^{1/2}\left((P_1 B_1)(P_1 B_1)^T\right) = \rho_{12},$

$\rho'_{21} = \alpha_{22} \|a_1\|, \quad \rho'_{22} = 2\alpha_{22} a_{k+1,k+1}, \quad \rho'_{23} = \alpha_{22} \|a_1\|, \quad \rho'_{31} = \rho_{12}, \quad \rho'_{32} = \lambda_M^{1/2}\left((P_1 a_2)^0 (P_1 a_2)^{\perp}\right),$

$\rho'_{33} = \rho_{22}, \quad \rho'_{14} = \|\alpha_{12} a_1\|, \quad \rho'_{15} = |\alpha_{12} a_{k+1,k+1}|, \quad \rho'_{16} = \|\alpha_{12} a_1^0\|, \quad \rho'_{17} = \lambda_M^{1/2}\left((\alpha_{12} A_1)(\alpha_{12} A_1)^T\right),$

$\rho'_{18} = \|\alpha_{12} a_2\|, \quad \rho'_{19} = \lambda_M^{1/2}\left((\alpha_{12} B_1)(\alpha_{12} B_1)^T\right), \quad \rho'_{24} = \lambda_M^{1/2}\left((A_1^T P_2)(P_2^T A_1)^T\right) = \rho_{13},$

$\rho'_{25} = \lambda_M^{1/2}\left((a_2^T P_2)(a_2^T P_2)^T\right), \quad \rho'_{26} = \rho_{14}, \quad \rho'_{27} = \rho_{24}, \quad \rho'_{28} = \lambda_M^{1/2}\left((P_2 a_2^0)(P_2 a_2^0)^T\right), \quad \rho'_{29} = \rho_{23},$

$\rho'_{34} = \|\alpha_{23} a_1\|, \quad \rho'_{35} = |\alpha_{22} a_{k+1,k+1}|, \quad \rho'_{36} = |\alpha_{23} a_1^{\perp}|, \quad \rho'_{37} = \lambda_M^{1/2}\left((\alpha_{23} B_1^0)(\alpha_{23} B_1^0)^T\right),$

$\rho'_{38} = \|\alpha_{23} a_2^0\|, \quad \rho'_{39} = \lambda_M^{1/2}\left((\alpha_2 A_1^0)(\alpha_2 A_1^0)^T\right).$

При этом для полной производной функции (30) имеет место оценка

$$\dot{v}_2(y, x_{k+1}, z) \le u_2^T C_2 u_2, \forall (y, x_{k+1}, z) \in N_{y0} \times N_{x_{k+1}0} \times N_{z0} \qquad (32)$$

где $u_2^T = (\|x\|, |x_{k+1}|, \|y\|)$

$$C_2 = \begin{pmatrix} C'_{11} & C'_{12} & C'_{13} \\ C'_{12} & C'_{22} & C'_{23} \\ C'_{13} & C'_{23} & C'_{33} \end{pmatrix}$$

$$C'_{11} = \rho'_{11} + \rho'_{14} + \frac{1}{2}\rho'_{27}, \quad C'_{22} = \rho'_{22} + \rho'_{18} + \rho'_{38}, \quad C'_{33} = \rho'_{33} + \rho'_{36} + \frac{1}{2}\rho'_{26},$$

$$C'_{12} = \rho'_{12} + \rho'_{21} + \frac{1}{2}(\rho'_{15} + \rho'_{17} + \rho'_{28} + \rho'_{37}), \quad C'_{13} = \rho'_{23} + \rho'_{32} + \frac{1}{2}(\rho'_{19} + \rho'_{25} + \rho'_{35} + \rho'_{39})$$

$$C'_{23} = \rho'_{13} + \rho'_{31} + \frac{1}{2}(\rho'_{16} + \rho'_{24} + \rho'_{29} + \rho'_{34})$$

Теорема 4. Пусть система (1) симметрична относительно центра системы, т.е. при $n = 2k$ (при $n = 2k+1$) имеет вид. (15) ((18)) и для системы (15) (для системы (18)) построена матричная функция (20) ((27)) с элементами (21) ((28)). Если

1. матрица $\underline{A}_1$ $(\underline{A}_2)$ положительно–определенная :
2. матрица C_1 (C_2) отрицательно–определенная,

то состояние равновесия $y = z = 0$ $(y = x_{k+1} = z = 0)$ асимптотически устойчиво в целом.

Доказательство. Пусть для системы (1) при $n = 2k$ (при $n = 2k+1$) построена матрица функция (20) ((27)) с элементами (21) ((28)). На основе матрицы функции (20) ((27)) с помощью вектора $\eta^T = (1,1)$ $(\eta^T = (1,1,1))$ построим скалярную функцию (23) ((30)), для которой выполняется оценка (24) ((31)). Из этой оценки и положительной определенности матрицы $\underline{A}_1$ $(\underline{A}_2)$ следует положительная–определенносте функции (23) ((30)).

Из оценки (25) ((32)) и отрицательной определенности матрицы C_1 (C_2) следует, что полная производная от функции (23) ((30)) в силу системы (15) ((18)) отрицательно–определенно. Эти условия, как известно [6], достаточны для асимптотической устойчивости в целом состояния равновесия системы (1).

3. Декомпозиция системы относительно уравновешивающихся подсистем. Пусть система (1) симметрично относительно центра матрицы, т.е. матрица А симметрическая относительно центра. Тогда соответствующие уравновешивающие подсистемы и связи между уравновешивающими подсистемами с соответствующими обратными связями будут одинаковы.

Если система (1) декомпозируется по уравновешивающим подсистемам, то она имеет вид:

1) при $n = 2k$

$$\dot{y}_i = A_{ii} y_i + \sum_{\substack{j=1 \\ i \ne j}}^{k} A_{ij} y_j, \quad i = 1,2,...,k = \frac{n}{2} \qquad (33)$$

2) при $n = 2k+1$

$$\dot{y}_i = A_{ii} y_i + \sum_{\substack{j=1 \\ i \ne j}}^{k} A_{ij} y_j + a_i x_{k+1}, \quad i = 1,2,...,k = \frac{n-1}{2} \qquad (34)$$

где $A_{ii} = \begin{pmatrix} a_{ii} & a_{i,n+1-i} \\ a_{i,n+1-i} & a_{ii} \end{pmatrix}$, $A_{ij} = \begin{pmatrix} a_{ij} & a_{i,n+1-j} \\ a_{i,n+1-j} & a_{ij} \end{pmatrix}$, $a_i = (a_{i,k+1}, a_{i,k+1})^T$,

$a_j = (a_{k+1,j}, a_{k+1,j})^T$, $y_i = (x_i, x_{n+1-i})^T$, $y = (y_1^T, y_2^T, ..., y_k^T)^T$, $i, j = 1,2,...,k$, $i \ne j$.

Заметим, что все матрицы A_{ii} и A_{ij} симметрические относительно центра матрицы и достаточными условиями асимптотической устойчивости состояния $i-$ой свободной подсистемы

$$\dot{y}_i = A_{ii} y_i \qquad (35)$$

являются условия

$$a_{ii} < 0,\ |a_{ii}| > |a_{i,n+1-i}|,\ i = 1,2,...,k \qquad (36)$$

а для подсистемы

$$\dot{x}_{k+1} = a_{k+1,k+1} x_{k+1} \qquad (37)$$

условие

$$a_{k+1,k+1} < 0 \qquad (38)$$

Далее исследуем систему (33). Если выполняются условия (36), то состояние равновесия $y_i = 0$ является асимптотически устойчивым и при любом $\alpha_{ii} > 0,\ i = 1,2,...,k$ функция $v_{ii} = y_i^T \alpha_{ii} E y_i$ является функцией Ляпунова для подсистемы (35). Поэтому для системы (33) построим матрицу–функцию

$$U(y) = (v_{ij}),\ v_{ij} = v_{ji},\ i,j = 1,2,...,k \qquad (39)$$

с элементами

$$v_{ii}(y_i) = y_i^T \alpha_{ii} E y_i,\ i = 1,2,...,k,$$
$$v_{ij}(y_i, y_j) = v_{ji}(y_j, y_i) = y_i^T \alpha_{ij} E y_j,\ i,j = 1,2,...,k,\ i < j \qquad (40)$$

которые удовлетворяют оценкам

$$v_{ii}(y_i) = \alpha_{ii} \|y_i\|^2,\ \forall y_i \in N_{y_i 0},\ i = 1,2,...,k,$$
$$v_{ij}(y_i, y_j) = -|\alpha_{ij}| \|y_i\| \|y_j\|,\ \forall (y_i, y_j) \in N_{y_i 0} \times N_{y_j 0},\ i,j = 1,2,...,k,\ i < j \qquad (41)$$

Нетрудно проверить, что при выполнении оценки (41) для положительной определенности скалярной функции

$$v(y) = \eta^T U(y) \eta,\ \eta = (1,1,...,1)^T \qquad (42)$$

достаточно, положительной определенность матрицы

$$P = (p_{ij}),\ \ p_{ij} = p_{ji},\ i,j = 1,2,...,k \qquad (43)$$

где $p_{ii} = \alpha_{ii},\ \ p_{ij} = -|\alpha_{ij}|,\ \ i,j = 1,2,...,k,\ i \neq j$

Для полной производной функции (42) в силу системы (33) справедливы следующие оценки

$$D^+ v(y) \le u^T G u,\ \forall y \in N_{y0} \qquad (44)$$

где $G = (\sigma_{ij}),\ \sigma_{ij} = \sigma_{ji},\ i,j = 1,2,...,k,\ \sigma_{ii} = \lambda_M(C_{ii}),\ \ \sigma_{ij} = \lambda_M^{1/2}(C_{ij} C_{ij}^T),$

$$C_{ii} = 2\alpha_{ii} A_{ii} + 2\sum_{\substack{j=1 \\ i<j}}^{k} \alpha_{ij} A_{ij},\ i = 1,2,...,k...,\ C_{ij} = \alpha_{ii} A_{ij} + 2\alpha_{ij}(A_{ii} + A_{jj}) + \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq i,j}}^{k} (\alpha_{si} A_{sj} + \alpha_{sj} A_{si}),$$

$i = 1,2,...,k-1;\ \ j = 2,3,...,k,\ \ i < j$

Теорема 5. Пусть система (1) такова, что для нее выполняются условия (36) и матрица–функция (38) имеет элементы (39), которые удовлетворяют оценкам (40). Если

1. матрица P –положительно–определенная,
2. матрица G–отрицательно–определенная

то состояние равновесия системы (33) асимптотически устойчиво.

Аналогично можно исследовать системы (34)

Пример. Пусть в системе (1) матрица A является 6–го порядка и симметрично относительно центра

$$A=\begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -3 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \qquad (45)$$

При декомпозиции по вертикальной и горизонтальной оси симметрии система (1) с матрицей (45) имеет вид.

$$\dot{y}=\begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix} y+\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} z,$$

$$\dot{z}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} y+\begin{pmatrix} -3 & -2 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} z \qquad (46)$$

где $y=(x_1,x_2,x_3)^T$, $z=(x_4,x_5,x_6)^T$

Для системы (46) построим матрицу–функцию (20) с элементами

$$v_{11}(y)=y^TEy,\ \ v_{22}(z)=z^TEz,\quad v_{12}(y,z)=y^T\begin{pmatrix} -0{,}1 & 0 & 0 \\ 0 & -0{,}1 & 0 \\ 0 & 0 & -0{,}1 \end{pmatrix} z \qquad (47)$$

Тогда матрица

$$\underline{A}_1=\begin{pmatrix} 1 & -0{,}1 \\ -0{,}1 & 1 \end{pmatrix}$$

является положительно определенной и функция (23) будет положительно определенной. При таком выборе элементов матрицы–функции (20) постоянные в оценках ($22'$) имеют вид

$$\rho_{11}=\rho_{22}=\frac{-11+\sqrt{17}}{2},\quad \rho_{13}=\rho_{23}\approx 0{,}045,\ \rho_{12}=\rho_{21}=1,\ \rho_{14}=\rho_{41}=0{,}2$$

и матрица

$$C_1=\begin{pmatrix} -3{,}24 & 0{,}445 \\ 0{,}445 & -3{,}24 \end{pmatrix}$$

является отрицательно определенной.

Итак, на основе теоремы 4 состояние равновесие системы (1) с матрицей (45) асимптотически устойчиво.

При декомпозиции по уравновешивающими подсистемами система (1) с матрицей (45) имеет вид:

$$\dot{y}_1 = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} y_1 + \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} y_2 + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} y_3$$

$$\dot{y}_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} y_1 + \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} y_2 + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} y_3 \qquad (48)$$

$$\dot{y}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} y_1 + \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} y_2 + \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} y_3$$

где $y_i = (x_i, x_{3+1-i})^T$, $i = 1,2,3$

Для системы (48) построим матрицу–функцию (39) с элементами

$$v_{ii} = y_i^T E y_i, \quad v_{ij} = 0{,}1 y_i^T E y_j, \quad i, j = 1,2,3 \qquad (49)$$

где $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

При этом матрица

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -0{,}1 & -0{,}1 \\ -0{,}1 & 1 & -0{,}1 \\ -0{,}1 & -0{,}1 & 1 \end{pmatrix}$$

является положительно определенной, которая обеспечивает положительную определенность функции (42). При таком выборе элементов матрицы–функции (39) матрица

$$G = \begin{pmatrix} -2{,}2 & 2{,}5 & 1{,}1 \\ 2{,}5 & -3{,}4 & 0{,}63 \\ 1{,}1 & 0{,}63 & -4{,}2 \end{pmatrix}$$

является отрицательно определенной. Поэтому на основе теоремы 5 состояние равновесия системы (48) асимптотически устойчиво.

4. **Заключительные замечания**. Абстрактное понятие «структуры» системы (см. [3]) позволило сформировать понятие связной устойчивости [6], играющее существенную роль в теории устойчивости крупномасштабных систем. Понятие обобщенного транспонирования [5] и исследование свойств матриц, подвергнутых обобщенному транспонированию, позволяет развить теорию устойчивости линейных крупномасштабных систем на основе новых форм декомпозиции исходной системы в зависимости от ее внутренней структуры. Приведенные результаты иллюстрируют возможности данного подхода.

Литература:

1. Беллман Р, Введения в теорию матриц, –М: Наука,1976
2. Гантмахер Ф.Р., Теория матриц, Москва, Наука, 1966
3. Harary F., Norman R.Z., Cartwright O. Structural models: An Introductions to the Theory of Directed Graphs. –Wiely, New Yourk, 1995.
4. Martynyuk A.A. Stability of Motion: The Role of Multicomponent Liapunov's Functions, Cambridge Scientific Publishers, 2007. – 32
5. Муллажонов Р.В. Обобщенное транспонирование матриц и структуры линейных крупномасштабных систем // Доп. НАН Украини–2009.–№ 11
6. Siljak D.D., Large–Scale Dynamic Systems : Stability and Structure, North–Holland, 1978.– 415 p.
7. Varge R.S, Matrix iterative analysis.–N.Y: Prentice–Hall, 1962.

Андижон давлат университети,
2009 йил 22 майда қабул қилинган