ЯСАШГА ДОИР МАСАЛАЛАРНИ ГЕОМЕТРИК АЛМАШТИРИШЛАР МЕТОДЛАРИ ЁРДАМИДА ЕЧИШ

Г.Н. Ғойибназарова

Мақолада ясашга доир геометрик масалаларнинг геометрия фанини самарали ўргатишдаги аҳамияти ҳамда бунга эришишда геометрик алмаштиришлар методларининг ўрни очиб берилган.

Калит сўзлар: *масала, ясашга доир масала, геометрик алмаштиришлар, геометрик алмаштириш методлари.*

В статье раскрыты геометрические задачи на построение и значимость таких задач. Также рассматриваются геометрические преоброзавания при решении конструктивных задач в курсе геометрии.

Ключевые слова: *задача, задача на построение, геометрическое преобразование, методы геометрических преобразований.*

Geometric tasks on the construction and significance of such tasks are discussed in the article. Geometric transformations in solving constructive tasks in the course of geometry are also discussed in the present article.

Key word: *tasks, tasks on construction, geometric transformations, methods of geometric transformations.*

Бугунги кун таълим тизими олдида турган энг асосий глобал муаммолардан бири ўқувчиларнинг мантиқий фикрлашларини шакллантириш ва ривожлантириш, шу асосда уларни мустақил фикрлашга ўргатишдир. Бунда англанган ҳолда билимларни эгаллаш муҳим ўрин тутади. Мазкур масалаларни ҳал этишда математика туркумидаги фанлар, айниқса, геометрия курси муҳим.

Геометриядан илк тушунчалар ўрта умумтаълим мактабларининг I-VI синфларида берилиб, VII-XI синфларда у систематик курс сифатида ўрганилади. Курсни ўрганиш жараёнида ўқувчилар фазовий тасаввурларини шакллантириш ва шу орқали математик тафаккурни ривожлантириш имкониятлари юқори ҳисобланади. Олиб борилган илмий-методик изланиш, узоқ йиллик педагогик тажриба шуни кўрсатадики, ясашга доир масалаларни геометрик алмаштиришлар методларидан кенг ва ўринли фойдаланиб ечишга ўргатиш кўзланган мақсадга эришишда муҳим ҳисобланади. Ўқувчиларни алмаштиришларнинг турли методлари ёрдамида геометрик масалаларни ечишга ўргатиш геометриянинг стереометрия бўлимини самарали ўқитишда ҳам асосий омиллардан бири бўлиб хизмат қилади.

Ясашга доир масалалар VII синф геометрия курсида ўрганилиб, у ўқувчиларнинг:

- фазовий тасаввурларини ривожлантиришда;
- англанган ҳолда билимларни эгаллаш имкониятларини оширишда;
- мантиқий фикрлаш доирасининг кенгайишида;
- эстетик дидининг ўсишида;
- физика, астрономия каби фанларни чуқур эгаллаши ва ҳ.к.ларда муҳим ўрин тутади.

Маълумки, нуқталарнинг ҳар қандай тўплами геометрик фигура ёки геометрик образ деб аталади. Масалан, битта нуқта, икки нуқта, кесма (унга тегишли барча нуқталар тўплами), нур, тўғри чизиқ, бурчак, ўзаро параллел ёки кесишувчи тўғри чизиқлар, ёй, айлана ва умуман, текисликнинг ҳар қандай бўлаги, куб, цилиндр, шар кабиларнинг ҳар бири ёки уларнинг бирон тўплами фигурадир.

Бир ёки бир неча ясаш қуроли (циркуль, чизғич, гўния ва б.) ёрдамида маълум талабларга жавоб берувчи геометрик фигура ясашни талаб этган масала ясашга доир геометрик масала дейилади. Математиканинг ясашга доир геометрик масалалар ечиш методларини ўргатувчи қисми геометрик ясашлар назарияси деб аталади.

Ясашга доир геометрик масалаларни ечишнинг асосий методлари қуйидагилар: I. Умумий метод. II. Тўғрилаш методи. III. Нуқталарнинг геометрик ўринларини топиш методи. IV. Геометрик ўринлар (маъ-

лум геометрик ринларни ишлатиш) методи. V. Симметрия методи. VI. Параллел кўчириш методи. VII. Нуқта атрофида айлантириш (ёки буриш) методи. VIII. Ўхшашлик ёки гомотетия методи. IX. Инверсия методи. X. Алгебраик анализ методи (алгебраик метод).

Мазкур методларнинг II-IV лари геометрик методлар деб юритилади, чунки булар ёрдамида масалалар ечишда, асосан, геометрик фактларга таяниб муҳокама юргизилади.

V-IX методлар геометрик алмаштириш методлари дейилади, чунки бу методлар билан масалалар ечишда геометрик алмаштириш методларидан фойдаланилади.

X метод - алгебраик анализ методи деб юритилиб, унинг ёрдамида ясашга домир масалалар ечишда алгебранинг геометрияга татбиқи, масалани ечишнинг анализ босқичини бажаришда алгебра қоидаларидан фойдаланилади.

Юқорида кўрдикки, симметрия, параллел кўчириш, нуқта атрофида айлантириш (ёки буриш), ўхшашлик ёки гомотетия, инверсия методлари геометрик алмаштириш методлари деб юритилади.

Таъриф. Текислик нуқталари тўпламидан иборат геометрик фигурани маълум қонун ёрдамида алмаштириб, шу текисликнинг иккинчи бир фигурасига ўтказиш – геометрик алмаштириш дейилади.

Геометрик алмаштиришни яна қуйидагича ҳам гаърифлаш мумкин.

Таъриф. Маълум қоида асосида текисликнинг ҳар бир M нуқтасига шу текисликдаги аниқ M' нуқта мос келтирилса, текисликдаги нуқталарни алмаштириш йўли аниқланган ёки қисқача алмаштириш берилган дейилади ва бу символик равишда f(M)=M' кўринишда белгиланади. Бунда M' нуқта M нуқтанинг образи (акси), M нуқта эса M' нуқтанинг прообрази (асли) дейилади. Бу ерда f белги алмаштиришнинг нимадан иборат эканлигини кўрсатади.

Текисликни нуқта атрофида буриш, марказий симметрия, ўқ симметрияси, параллел кўчириш ва гомотетиялар геометрик алмаштиришнинг энг содда кўринишларидандир.

Текис фигуранинг ҳар бир M нуқтасига мос M' образлар тўпламидан иборат F' фигура F фигуранинг образи дейилади, F фигура эса F' фигуранинг прообрази дейилади ва символик равишда f(F)=F' кўринишда белгиланади.

Бир фигурани иккинчи бир фигурага алмаштиришда нуқталар орасидаги масофалар сақланса, яъни бир фигуранинг исталган иккита X ва Y нуқтасини иккинчи фигуранинг X' ва Y' нуқтасига ўтказилса ва бунда XY =X' Y' тенглик бажарилса, бундай алмаштириш ҳаракат дейилади.

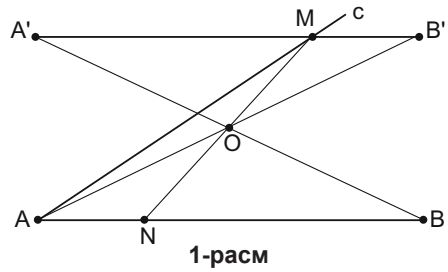
Энди геометрик алмаштиришлар методлари ёрдамида ясашга доир масалаларни ечиш бўйича намуналар кўриб чиқайлик.

1. Симметрия методи ёрдамида ясашга доир масалалар ечиш

Ясаш талаб этилган фигура бирор тўғри чизиққа ёки нуқтага нисбатан симметрик нуқталарга эга бўлиши мумкин. Бундай ҳолда тўғри чизиққа ёки нуқтага нисбатан симметрик алмаштиришни бажариш керак бўлади.

1-масала. ABC бурчак ва унинг ичида O нуқта берилган. O нуқтадан бурчак томонлари орасидаги кесмаси O нуқтада тенг иккига бўлинадиган тўғри чизиқни ўтказинг.

Ечиш. Таҳлил. Фараз қилайлик, масала ечилган ва MN изланган тўғри чизиқ бўлсин (1-расм).



1-расм

O нуқтани симметрия маркази деб қабул қилсак, у ҳолда M ва N нуқталар O нуқтага нисбатан симметрик бўлади.

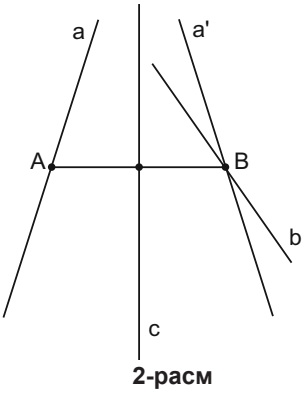
Айтайлик, O нуқтага нисбатан A' B' тўғғри чизиққ AB тўғри чизиққа симметрик бўлсин. У ҳолда M нуқта AB тўғри чизиқда ётувчи N нуқтага нисбатан симметрик бўлгани учун A' B' тўғғри чизиқ M нуқтадан ўтиши керак. Бунинг учун эса M нуқта BC ва A' B' тўғри чизиқлар кесишиш нуқтаси бўлиши керак.

Ясаш. 1) O марказга нисбатан AB тўғри чизиққа симметрик бўлган A' B' тўғри чизиқни ясаймиз: бунинг учун O нуқққтага нисбатан A нуқтага симметрик бўлган A' нуқтани ясаймиз ва B нуқтага симметрик бўлган B' ни аниқлаймиз.

2) BC ва A' B' тўғри чизиқлар кесишиш нуқтаси M ни топамиз ва уни O нуқта билан туташтирсак, изланган MN тўғри чизиқ ҳосил бўлади. Бунда исбот таҳлил ва ясашдан келиб чиқади. Таҳлил ва ясашдан берилган масала ҳамма вақт ягона ечимга эга экани маълум бўлади.

2-масала. a,b ва c учта тўғри чизиқлар бўлиб, c тўғри чизиқ AB кесманинг ўрта перпендикуляри бўлсин. У ҳолда учлари a ва b тўғри чизиқларда ётган AB кесмани ясанг.

Ечиш.



2-расм

Текшириш. Масала ечилган деб фараз қилайлик. У ҳолда изланган кесма учлари с тўғри чизиққа нисбатан симметриянинг таърифига асосан симметрик бўлади (2-расм). У ҳолда с тўғри чизиққа нисбатан а тўғри чизиқни симметрик алмаштирсак, а тўғри чизиқ В нуқтадан ўтувчи а' тўғри чизиққа ўтади. Бундан, В нуқта b ва а' тўғри чизиқлар кесишиш нуқтасидан иборат эканлиги келиб чиқади.

Ясаш.

1) ихтиёрий учта a,b,c тўғри чизиқларнини оламиз.

2) с тўғри чизиққа нисбатан а тўғри чизиқнинг образи бўлган а' тўғри чизиқни ясаймиз. Ясаш натижасидан а' ва b тўғри чизиқлар В нуқтада кесишиши келиб чиқади.

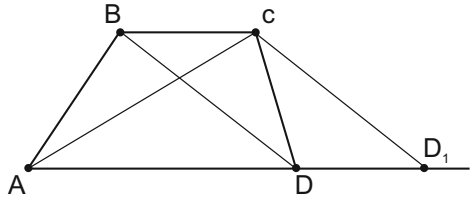
3) В нуқта орқали с тўғри чизиққа перпендикуляр тўғри чизиқни ўтказамиз. Бу тўғри чизиқ а тўғри чизиқни А нуқтада кесиб ўтади. АВ кесма биз излаган кесма бўлади. Таҳлил ва ясашдан берилган масала ҳам ягона ечимга эга эканлиги келиб чиқади.

2. Параллел кўчириш методи ёрдамида ясашга доир масалалар ечиш

Мазкур методда изланган фигура айрим қисмлари маълум бир ясашни амалга оширишда янги фигурани ҳосил қилиш мақсадида параллел кўчирилади.

3-масала. Трапециянинг асослари ва диагоналлари берилган. Шу трапецияни ясанг.

Ечиш. Таҳлил. Фараз қилайлик берилган масала ечилган, яъни ABCD трапеция ясалган (3-расм).



3-расм

Берилган ABCD трапециянинг BD диагоналини шундай параллел кўчирайликки, трапециянинг В учи С учи билан устма-уст тушсин. У ҳолда ҳосил бўлган ACD_1 учбурчакнинг (3-расм) барча томонлари маълум. Чунки унинг АС ва CD_1 томонлари берилган трапециянинг диоганалларидан, DD_1 томони эса берилган трапеция асослари йиғиндисининг ярмига тенг. Юқоридагиларга асосланган ҳолда ясашни қуйидаги тартибда амалга ошириш мумкин экани келиб чиқади.

Ясаш. 1) бунинг учун тўғри чизиқда AD кесмани ажратиб оламиз ва трапециянинг иккита диагонали ва битта томонига кўра параллел кўчириш ёрдамида ACD_1 учбурчакни ясаймиз.

2) D нуқта орққали CD_1 тўғри чизиққа, С нуқта орқали эса AD_1 тўғри чизиққа параллел тўғри чизиқлар ўтказамиз. Улар кесишган нуқтани В ҳарфи билан белгилаб, параллел тўғри чизиқни ўтказамиз. У ҳолда улар В нуқтада кесишади. Бу нуқта трапециянинг тўртинчи учи бўлади. Натижада берилган диоганналлар ва асослар бўйича ABCD трапецияга эга бўламиз. Масаланинг исботи таҳлил ва ясашдан келиб чиқади.

Мазкур масала фақат ACD1 учбурчакни ясаш мумкин бўлган ҳолдагина ечимга эга. Аммо, ΔACD_1 учбурчакни фақатгина $|d_1 - d_2| < a + b < d_1 + d_2$ шарт бажарилгандагина ясаш мумкин (бу ерда *a, b* – трапеция асослари, d_1 ва d_2 эса трапеция диагоналлари). Юқоридаги учбурчак тенгсизлигидан

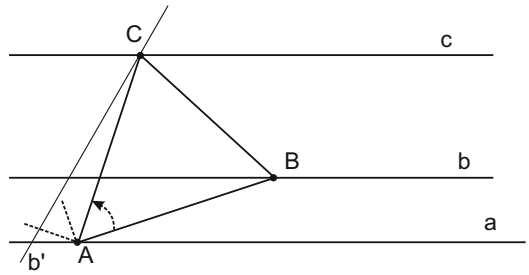
$AD_1 = a + b$, $AC = a - b$, $AC = d_1$, $AD_1 = d_2$ шарт келиб чиқади.

2. Буриш методи ёрдамида ясашга доир масалалар ечиш.

Буриш методида фигуранинг айрим элементлари ясаши маълум бўлган янги фигурани ҳосил қилиш учун бурилади.

4-масала. Ўзаро параллел бўлган a,b,c параллел тўғри чизиқлар берилган бўлсин. А,В ва С учлари берилган тўғри чизиқларда ётувчи тенг томонли АВС учбурчакни ясанг.

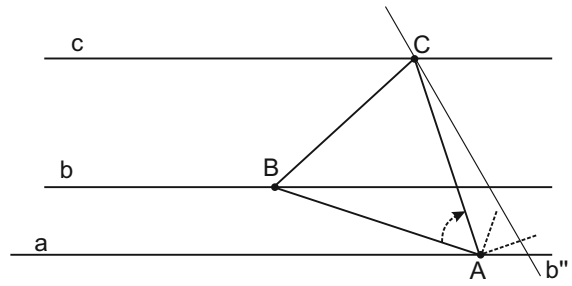
Ечиш. Таҳлил. Фараз қилайлик берилган масала ечилган, яъни ΔABC учбурчак ясалган бўлсин (4-расм).



4-расм

Масала шартига асосан, $AB = AC = BC$ ва $\angle BAC = 60^\circ$ бўлгани учун В нуқта А нуқта атрофида 60° га ёки -60° га буришда С нуқтага ўтади. Чунки $\angle BAC = +60^\circ$ ёки $\angle BAC = -60^\circ$.

Масалан. В нуқта А нуқта атрофида 60° га буришда С нуқтага ўтсин (4-расм). В нуқта b тўғри чизиқда ётади. Шунинг учун ундан А нуқта атрофида 60° га буриш билан олинадиган С нуқта b тўғри чизиқни А нуқта атрофида 60° га буришда олинадиган b' тўғри чизиқда ётиши лозим. Бундан ташқари, С нуқта шартга кўра с тўғри чизиқда ётади. Шунинг учун С нуқта b' ва с тўғри чизиқлар кесишиш нуқтаси.



5-расм

Шунга ўхшаш, агар В нуққта А нуқта атрофида -60° бурчакка буришда С нуқтага ўтса, у ҳолда С нуқта с тўғри чизиқ ва b тўғри чизиқни А нуқта атрофида

60º га буришда олинадиган b”тўғри чизиқ кесишиш нуқтасидан иборат (5-расм).

Ясаш. 1) а тўғри чизиқда ихтиёрий А нуқтани белгилаймиз.

2) b тўғри чизиқни А нуқта атрофида 60º га буришда олинадиган b'' тўғри чизиқни ясаймиз (5-расм).

3) У ҳолда b'' ва с тўғри чизиқлар битта нуқтада кесишади. Уни С десак, бу учбурчакнинг иккинчи учи бўлади.

4) С нуқтадан А нуқта атрофида 60º га буриш амалга оширсак, у ҳолда АВС учбурчакнинг учинчи учи В ҳосил бўлади. Демак, масала ечилди.

Мазкур масала иккита ечимга эга бўлиб, унинг иккинчи ечимини қуйидагича йўл билан аниқлаш мумкин. Бунинг учун А нуқта атрофида 60º га буришни ўша нуқта атрофида – 60º бурчакка буриш билан алмаштириш орқали аниқлаш мумкин (5-расм).

Исбот. А нуқта атрофида – 60º га буришда b'' тўғри чизиқ b тўғри чизиққа ўтади (5-расм). Демак, b' тўғри чизиқнинг С нуқтаси юқоридаги буришда b тўғри чизиқда ётувчи нуқтага ўтади. Бошқача айтганда, В нуқта b тўғри чизиқда ётади. Буриш таърифига асосан: ∠ВАС = 60º, АС = АВ. Шунинг учун ҳам ∠АВС – учидаги бурчаги 60º га тенг бўлган тенг ёнли учбурчак бўлади. Шу йўл билан 5-расмда тасвирланган учбурчак ҳам тенг томонли эканлигини исботлаш мумкин.

Умуман, геометрия курсини ўрганиш жараёнида юқорида кўриб чиқилган мазмундаги масалаларни ечишга ўргатиш ўқувчиларнинг математик билимларни самарали ўзлаштириши билан бир қаторда эгаллаган билимлардан кундалик фаолиятда фойдалана олиш имкониятларини ҳам оширади.

Адабиётлар:

1. Погорелов В.А. Геометрия. Ўрта мактабнинг 7-11 синфлари учун дарслик. – Т.: Ўқитувчи, 1994.- 368 б.
2. Отажонов Р. К. Геометрик ясаш методлари (ўқув қўлланма). - Т.: Ўқитувчи, 1986.- 364 б.
3. Зив Б. Г. и др. Задачи по геометрии для 7–11-х классов.- М.: Просвещение,1991.- 171 с.

Тошкент давлат педагогирка университети,
2018 йил 25 июнда қабул қилинган
(Тақризчи: доц. Р.Муллажонов)