АЛГЕБРА НИМАНИ ЎРГАНАДИ?
(Мозий ва бугун)

Ш.Қосимов, К.Солижонова

Мақолада алгебранинг вужудга келиш тарихи ва унинг турли даврларда ўрганилиш босқичлари келтирилган. Бундан ташқари, замонавий алгебранинг ҳозирги ҳолати ҳақида ҳам маълумот берилган.

***Калит сўзлар**: алгебраик тенглама, квартернионлар, гиперкомплекс системалар, ярим майдонлар, Йордан оператор алгебралари, ноассоциатив алгебралар, альтернатив алгебралар , n-Ли алгебралари, матрицалар, рационал сонлар, иррационал сонлар.*

В статье освещается история возникновения алгебры и различные периоды её развития. Также приведены сведения о состоянии современной алгебры.

***Ключевые слов:** алгебраическое уравнение, квартернионы, гиперкомплексная система, полуполя, алгебры йордановых операторов, неассоциативные алгебры, альтернативные алгебры, n-лиевые алгебры, матрицы, рациональные числа, иррациональные числа.*

In the article the history of the development of algebra and the various periods of studying of algebra is discussed. Besides in the given article the information on the present state of development of the modern algebra is given.

***Key words:** algebraic equations, quarternions, hyper complex systems, ordered fields, Jordan operator algebras, nonassociative algebras, alternative algebras, n-Li algebras, matrices, rational numbers, irrational numbers.*

Бизнинг давримизга келиб математика шитоб билан ривожланмоқда. Шу сабабли замонавий алгебранинг математикадаги роли ўта муҳим эканлиги маълум бўлиб қолди. Бу ўринда хатто «математикани алгебралаштириш» бошланди. Яъни математиканинг ривожланишида замонавий алгебранинг ғоя ва усулларидан кенг фойдаланилмоқда. Шу муносабат билан «алгебра нимани ўрганади?» деган саволга жавоб берайлик. Бу саволга жавобни мозийга назар ташлашдан бошлаймиз. Эрамиздан аввалги III асрга қадар Миср, Греция ва Вавилонда бутун сонлар ва мусбат рационал сонлар устида арифметик амалларни бажаришни билганлар. Улар геометрия ва астрономияга оид ҳисоблашларда содда алгебраик формулаларни қўллаганлар. Бу даврда Диофант арифметикаси юзага келди. Шундан сўнг алгебранинг ривожланишида узоқ вақт тўхталиш бўлиб, эрамизнинг 825 йилларидан у яна жонлана бошлади. Бу даврда Шарқнинг буюк мутафаккири, Хоразмнинг Хива шаҳрида таваллуд топган бобомиз Муҳаммад ибн Мусо ал Хоразмий «Ҳисаб ал жабр ва ал муқобала» рисоласида биринчи ва иккинчи даражали алгебраик тенгламаларни ечиш усулларини кўрсатиб берди. Шу асардан ва шу асрдан бошлаб алгебра термини дунёга келди. Кейинчалик, Фибаначчи (1170-1250), С.Ферро (1465-1526), Н.Тарталья (1500-1557), И.Кардано (1501-1576), Ф.Виет (1540-1603) каби олимлар 3-чи ва 4-чи даражали алгебраик тенгламаларнинг ечимларини топдилар. Бу даврда ҳозирги замон алгебрасининг символикаси юзага келди. XVII-XVIII асрларда эса Р.Декарт (1596-1650), П.Ферма (1601-1665), И.Нютон (1643-1727), Ж.д`Аламбер (1717-1783) ларнинг ишларида аналитик геометрия шаклланди. Бу алгебра билан геометрия ўртасида мустаҳкам кўприк вазифасини бажарди. Шу ўринда Софи Жермен (XX аср математиги)нинг бу ҳақдаги фикрини келтириб ўтиш жоиз: «Алгебра символлар ёрдамида ёзилган геометриядан бошқа нарса эмас. Геометрия эса шаклларга сингиб кетган алгебрадир»[1].

Бу даврда алгебраик тенгламалар ечимининг умумий формуласини топиш устида катта ишлар қилинди: детерминантлар назарияси ва алгебраик сонлар назарияси дунёга келди. XIX-XX аср бошларида сонли коэффициентли тенгламаларнинг ечими мавжудлиги ҳақидаги асосий теоремани исботлашга қуйидаги математиклар ўз ҳиссаларини қўшдилар: К.Гаусс (1777-1855), П.Дирихли (1805-1859), Л.Кронеккер (1823-1891), А.Марков (1856-1922). Бу даврда алгебраик тенгламаларнинг илдизларини топишнинг тақрибий усуллари шакл топди. n-даражали ($n \geq 5$) тенгламаларнинг радикалларда ечими мавжуд эмаслиги ҳақидаги

муаммонинг ҳал қилинишида А.Руфини (1765-1822), Н.Абель (1802-1822), К.Якоби (1804-1851), Э.Галуа (1811-1882), О.Риман (1826-1866), К.Йордан (1838-1922), Л.Силов (1832-1918) ва бошқалар катта ҳисса қўшдилар. Галуа назарияси, чекли группалар назарияси, алгебраик функциялар назарияси дунёга келди. Г.Грассман (1809-1877), Д.Силвестр (1814-1897), Ж.Бул (1815-1864), С.Ли (1842-1899), Г.Фробениус (1849-1918), Ж.Серре (1819-1885), Д.Гилберт (1862-1943), Н.Бурбаки (француз математиклари гуруҳи) кабиларнинг илмий ишлари натижасида чизиқли алгебра усуллари таркиб топди, квартернионлар кашф қилинди, гиперкомплекс системалар (ҳозирда бу системаларни алгебралар деб атайдилар) дунёга келди. Бундан ташқари, узлуксиз группалар (уларни Ли группалари деб атайдилар)нинг ривожланиши билан, Ли алгебраларига асос солинди. Шу даврда алгебраик геометрия ва инвариантлар назарияси ривож топди. Ҳозирги даврга келиб ярим майдонлар, оператор алгебралари, Йордан оператор алгебралари, ноассоциатив алгебралар, альтернатив алгебралар ва n-Ли алгебралари (бу тоифадаги алгебраларни ҳозирда В.Т.Флиппов алгебалари деб атамоқдалар) ҳамда бошқа йўналишдаги алгебралар ривож топмоқда. Бу соҳаларда Т.А.Саримсоқов, Ш.А.Аюпов, Ю.Ҳакимжонов, Ш.М.Қосимов, Б.А.Омиров, Ф.Н.Арзиқулов, А.Р.Ғуломов каби ватандошларимиз билан бир қаторда И.П.Шестаков, Н.Кузмин, В.Т.Флиппов, И.Зелманов каби қатор чет эл олимлари ҳам шуғулланиб келмоқдалар.

Шу ерда «мозийга саёҳат»имизни тўхтатиб, мавзу бошида ўртага ташланган «алгебра нимани ўрганади?» деган саволга жавоб қидирайлик. Бунга қисқа жавоб бериш оғирлик қилади. Шунинг учун энди тарихга иккинчи кўз билан назар ташлаймиз: қадим замонларда предметларнинг сони ҳақидаги маълумотга эга бўлиш учун инсоният мусбат бутун сонларни кашф этди, сўнгра турли хил объектларни ўлчаш мақсадида каср ва манфий сонларни топдилар. Эътибор беринг, бирор объектни «ўлчаш» деган сўз шу объектни сонлар орқали ифодалашни англатади. Худди шунингдек, томонлари 1 (бир) бирликка тенг бўлган квадратнинг диагоналини сонлар орқали ифодалашни истаган қадимги математикларнинг боши қотиб қолди. Чунки юқорида зикр этилган квадратнинг диагоналини ўша пайтгача маълум бўлган рационал сонлар орқали ифодалаб бўлмас эди. Ниҳоят, иррационал сонлар кашф қилингандан сўнг, исталган объектни ҳақиқий сонлар орқали ифодалаш мумкин деган ғоя пайдо бўлиб қолди. Хақиқатан ҳам, бу даврга келиб тўғри чизиқнинг исталган нуқтасини ҳамда кўпгина физик миқдорларни (тезлик, зичлик, ҳарорат ва ҳоказоларни) ҳақиқий сонлар орқали ифодалаш мумкин бўлди. Бу борада Галилей яна ҳам олдинга кетиб, қуйидаги тезисни илгари сурди: «Ўлчаш мумкин бўлган барча нарсалар ўлчанади. Ўлчаш мумкин бўлмаган нарсаларни ўлчанадиган ҳолатга келтириш мумкин» [1-3]. Тезисдаги «ўлчаш» сўзини Галилей ўта мураккаб бўлган «координатизациялаш» атамаси орқали ифодалайди. Бу тезис Галилей яшаган замондан бошлаб ниҳоятда катта кучга кирди. Аналитик геометриянинг яратилиши нафақат тўғри чизиқ нуқталарининг сон билан ифодаланишини, балки текислик ва фазонинг нуқталари ҳам мос равишда (x, y) жуфтлик ва (z, t, u) учликлар орқали сонлар билан ифодаланишини, яъни координатизацияланишини кўрсатди. Боз устига, аналитик геометрия тўғри чизиқлар ва эгри чизиқлар ҳам мос равишда биринчи ва иккинчи даражали тенгламалар ёрдамида сонлар орқали ифодаланиши мумкинлигини, яъни координатизацияланишини исботлади. Шу йўсинда Галилей тезиси узоқ вақт саҳнадан тушмади: унинг ғояси бўйича барча объектларни кординатизациялаш мумкин, бунинг учун «етарлича сонлар мавжуд, фақатгина ихтиёрий объектни координатизациялаш (ўлчаш) учун декарт координатасига ўхшаш ўта нозик ғоя ва усулларни излаб топиш зарур» деб билган ўша давр математиклари. Тенгламаларнинг илдизларини сонлар орқали ифодалаш йўлидаги изланишлар натижасида комплекс сонларнинг кашф қилиниши математика дунёсида оламшумул аҳамият касб этди. Саҳнага энди ҳақиқий сонлар эмас, комплекс сонлар чиқди. Натижада эллиптик функциялар ва риман сиртларини ўз ичига олувчи математиканинг бутунлай янги соҳаси дунёга келди. Шундай қилиб, сонлар занжири кенгайиб, қуйидаги кўринишга эга бўлди:

$$N \subset Z \subset Q \subset R \subset C \quad (1).$$

Бу ерда N, Z, Q, R, C лар мос равишда натурал, бутун, рационал, ҳақиқий ва комплекс сонлар тўпламларидир. Бу даврга келиб сонлар билан ҳеч қандай алоқаси йўқ, бироқ сонларнинг хоссасига ўхшаш хоссаларга эга бўлган бутунлай бошқа объектлар кашф қилина бошланди. Масалан, сонлардаги кўп хоссаларга эга бўлган, бироқ умуман сон бўлмаган матрицалар ҳеч қайси сонга ўхшамайди, шунинг учун уларни (1) занжирга кирита олмаймиз. Бундан ташқари квартернионларни олайлик: улар сонлар эга бўлган кўпгина хоссаларга эга, бироқ сон эмас, шунинг учун уларни ҳам (1) занжирга кирита олмаймиз. Шунга ўхшаш

қатор бошқа объектлар ҳам мавжуд: буларга гиперкомплекс системаларни (буни ҳозирда алгебра дейилишини юқорида айтдик), Пуассон қавсини, алгебрадаги чекли майдонларни, сонлар назариясидаги р-адик сонларни киритиш мумкин. Кўринадики, Галилейнинг тезиси ҳар доим ҳам ўринли эмас экан.

Бироқ Галилейнинг тезисини «юқорида келтирилган сонга ўхшаш объектлар учун сақлаб қолиш мумкин эмасми?» деган савол туғилади. Агар шундай десак, Галилей тезиси қуйидагича янги кўриниш олади: «Математик изланишнинг предмети бўлган, барча нарсалар: эгри чизиқлар, сиртлар, акслантиришлар, симметриялар, кристаллар, кванто-механик миқдорлар ва ҳоказоларни координатизациялаш (ўлчаш) мумкин. Бунинг учун қаралаётган янги объектни координатизатциялаш учун зарур бўлган янги тоифадаги миқдор (буларга юқорида келтирилган матрицалар, квартернионлар, гиперкомплекс системалар – алгебралар, р-адик сонлар ва ҳоказолар киради)ларни кашф қилиш ва уларнинг тузилмаларини ўрганиш устида илмий изланишлар олиб бориш зарур. Шулар каби масалаларни алгебра ўрганади».

Адабиётлар:

1. Итоги науки и техники. Серия: Современные проблемы математики. Фундаментальные направления Том 11.- М.: Наука, 1986.- С.9-14,75,83,213.

2. Итоги науки и техники. Серия: Современные проблемы математики. Фундаментальные направления Том 18.- М.: Наука,1988.- С.9,73,143,170,213-224.

3. Бурбаки Н. Очерки по истории математики.- М.: Иностр. лит., 1963.- С.30,71-75,108,271.

4. Фрид Э. Элементарное введение в абстрактную алгебру.- М.: Мир, 1979.- С.52,149,156.

5. Кострикин А.И. Введение в алгебру.- М.: Наука, 1977.- С.14-23.

Андижон давлат университети,
2017 йил 13 ноябрда қабул қилинган
(Тақризчи: ф.-м.ф.д. Ф.Арзиқулов)